分離正則性について (フーリェ超函数と偏微分方程式)

濃野, 聖晴

数理解析研究所講究録
459巻 1982年 10-17

分離正則性について

福岡教育大学　　濃野聖晴

§1. 序.

D, Gをそれぞれ複素空間$\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^q$の領域とし，$E \subset D, F \subset G$, $X = (D \times F) \cup (E \times G)$とする。$f(z,w)$を$X$で定義された関数とし，$\{f_m(z,w)\}$, $\mathcal{F}$をそれぞれ$D \times G$で正則な関数列，関数族とする。$H(D \times G)$を$D \times G$で正則な関数全体，$UC(D \times G)$を$D \times G$で広義一様収束する関数列全体，$N(D \times G)$を$D \times G$で正規族である関数族全体とする。

定義1. 各$w \in F$ $(z \in E)$に対して，$f(z,w)$がD (G)で正則であるとき，fはXで分離正則であるといい，$f \in SH(X)$と書く。

定義2. 各$w \in F$ $(z \in E)$に対して，$\{f_m(z,w)\}$がD (G)で広義一様収束するとき，$\{f_m\}$はXで分離広義一様収束するといい，$\{f_m\} \in SUC(X)$と書く。

定義3. 各$w \in F$ $(z \in E)$に対して，$\mathcal{F}$がD (G)で正規族であるとき，$\mathcal{F}$はXで分離正規であるといい，$\mathcal{F} \in SN(X)$と書く。

定義1にて$E = D$, $F = G$の場合，

$$\text{“}\ f \in SH(X) \Rightarrow f \in H(D \times G)\ \text{”}$$

が成立する。これはHartogsの正則性定理として良く知られている。定義2，3にて，$p=q=1$，$E=D$，$F=G$の場合，

"$\{f_n\}\in SUC(X)\Rightarrow\{f_n\}\in UC(D\times G)$"

"$\mathcal{F}\in SN(X)\Rightarrow\mathcal{F}\in N(D\times G)$"

が成立する。これはT. Nishino [2] の結果である。次の問題はM. Hukuhara [1] によって差し出された問題である。

<u>問題H1.</u>：定義1にて，$F=G$の場合，

"$f\in SH(X)\Rightarrow f\in H(D\times G)$"

なる$E\subset D$を特徴付けよ。

この問題はT. Terada [5]，[6]によって解決された。次の問題はJ. Siciak [3]によって差し出され，解決された。

<u>問題H2</u>：定義1にて，

"$f\in SH(X)\Rightarrow f$はXの近傍Ωに接続出来る。"

なる$E\subset D$，$F\subset G$を特徴付けよ。

定義2，3に対しても問題H1，H2と類似の問題が考えられる。

<u>問題C1.</u>：定義2にて，$F=G$の場合，

$\{f_n\}\in SUC(X)\Rightarrow\{f_n\}\in UC(D\times G)$

なる$E\subset D$を特徴付けよ。

<u>問題C2.</u>：定義2において，

$\{f_n\}\in SUC(X)\Rightarrow{}^{\exists}\Omega$：Xの近傍；$\{f_n\}\in UC(\Omega)$

なる$E\subset D$, $F\subset G$を特徴付けよ。

問題N1.:定義3で$F=G$の場合

$$\mathcal{F}\in SN(X)\Rightarrow \mathcal{F}\in N(D\times G)$$

なる$E\subset D$を特徴付けよ。

問題N2.:定義3において,

$$\mathcal{F}\in SN(X)\Rightarrow {}^{\exists}\Omega : X\text{の近傍}; \mathcal{F}\in N(\Omega).$$

なる$E\subset D$, $F\subset G$を特徴付けよ。

問題C1, N1はT. Terada [6]によって既に解決された。ここでは問題C2, N2について言及します。

§2. 定義.

$E\subset \mathbb{C}^g$, $a\in\mathbb{C}^g$とする。各$z\in E$に対して$\sup_{P\in\mathcal{F}}|P(z)|<+\infty$なる任意の多項式の族$\mathcal{F}$と任意の$\varepsilon>0$に対して,

$$|P(z)|\leq Me^{\varepsilon \deg P},\quad |z-a|<\delta,\quad P\in\mathcal{F},$$

を満す定数$M=M(a,\varepsilon)>0$, $\delta=\delta(a,\varepsilon)>0$が存在するとき$E$は$a$で条件$(L_0)$を満すという。任意の正数$r$に対して, $E_r\equiv\{z\in E; |z-a|\leq r\}$が$a$で$(L_0)$をみたすとき, Eはaで条件(L)をみたすという。EがEの各点で条件(L)をみたすとき$E\in(L)$と書く。

Gを$\mathbb{C}^g$の領域とし, FをGのコンパクト集合とする。

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(G,F)\equiv\{u(w);\ u(w)\text{は}G\text{で多重劣調和関数},\ F\text{上で}\ u(w)\leq 0,\ G\text{にて}\ u(w)\leq 1\}.$$

$$h_G(w,F)\equiv\varlimsup_{w'\to w}\sup\sup\{u(w');\ u\in\mathfrak{M}\},\quad w\in G.$$

とする。任意の σ, $0<\sigma<1$ に対して, $G_\sigma\equiv\{w\in G;\ h_G(w,F)<\sigma\}$ が $F\subset G_\sigma\Subset G$ をみたすとき, (G,F) は条件 (A_0) を満すといい, $(G,F)\in(A_0)$ と書く。$G_s\Subset G$, $F\subset G_s\subset G_{s+1}$, $G=\bigcup_{s=1}^{\infty}G_s$, $(G_s,F)\in(A_0)$ を満す領域の列 $\{G_s\}$ が存在するとき, (G,F) は条件 (A) をみたすといい, $(G,F)\in(A)$ と書く。また $H_G(w,F)\equiv\lim_{s\to\infty}h_{G_s}(w,F)$, $\hat{F}=\hat{F}_G\equiv\{O;\ O$ は $G-F$ の連結成分, $O\Subset G\}$ とする。

§3. Siciak の結果

問題H2 に関する Siciak の結果を紹介する。

定理3.1. D を複素平面の領域とし, $E\subset D$ をコンパクト G を $\mathbb{C}^q$ の領域で, $F\subset G$ をコンパクト, $(G,F)\in(A)$ とする。このとき, $f\in SH(X)$, $X\equiv(D\times F)\cup(E\times G)$ ならば,

(1°) $\exists\hat{f}\in H(\Omega)$; $\hat{f}|X=f$, $\Omega\equiv\{(z,w)\in D\times G,\ H_D(z,E)+H_G(w,F)<1\}$.

(2°) Ω は X の正則包である。

定理3.2. D_k を複素平面の領域 $(k=1,\cdots,n)$ とし, $E_k\subset D_k$ を $\partial\hat{E}_k\in(L)$ なるコンパクト集合, $X=(D_1\times E_2\times\cdots\times E_n)\cup\cdots(E_1\times\cdots\times E_{n-1}\times D_n)$ とする。$f\in SH(X)$ (すなわち, $(z_1,\cdots,z_{k-1},z_{k+1},\cdots z_n)\in E_1\times\cdots\times E_{k-1}\times E_{k+1}\times\cdots\times E_n$ に対して f は D_k で正則, $k=1,\cdots n$) ならば

1°) $^{\exists}\tilde{f} \in H(\Omega)$; $\tilde{f}|X = f$ ，ただし

$$\Omega \equiv \{(z_1, \cdots, z_n) \in D_1 \times \cdots \times D_n ;\ h_{D_1}(z_1, E_1) + \cdots + h_{D_n}(z_n, E_n) < 1\}$$

2°) Ω は X の正則包である。

(注) この講演後に判明した事であるが，定理3.1.において D が複素空間 $\mathbb{C}^p$ $(p \geqq 1)$ の場合に Siciak [4] によって問題H2は解決されている。

§4. 問題C2, N2について.

定理1. D を複素平面の領域とし，$E \subset D$ をコンパクト，G を複素空間 $\mathbb{C}^g$ の領域，$F \subset G$ をコンパクトで $(G, F) \in (A)$ をみたすものとする。このとき $\{f_n(z, w)\} \in SUC(X)$, $X = (D \times F) \cup (E \times G)$ ならば，

1°) $\{f_n\} \in UC(\Omega)$, $\Omega \equiv \{(z, w) \in D \times G ;\ H_D(z, E) + H_G(w, F) < 1\}$.

2°) Ω は X の正則包である。

定理2. D_k を複素平面の領域 $(k = 1, \cdots, m)$ とし，$E_k \subset D_k$ を $\partial \hat{E}_k \in (L)$ なるコンパクト集合，$X = (D_1 \times E_2 \times \cdots \times E_m) \cup \cdots \cup (E_1 \times \cdots \times E_{m-1} \times D_m)$ とする。$\{f_n(z)\} = \{f_n(z_1, \cdots, z_m)\} \in SUC(X)$ (すなわち，$(z_1, \cdots, z_{k-1}, z_{k+1}, \cdots, z_m) \in E_1 \times \cdots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \cdots \times E_m$

に対して，$\{f_n(z_k)\}$ は D_k で広義一様収束する。$(k=1,\cdots,m)$ ）ならば

1°) $\{f_n\}\in UC(\Omega)$．ただし $\Omega\equiv\{z\in D_1\times\cdots\times D_m;\ h_{D_1}(z_1,E_1)+\cdots+h_{D_m}(z_m,E_m)<1\}$．

2°) Ω は X の正則包である。

<u>定理3.</u> D,E,G,F,X は定理1のものとする。$\mathcal{F}\in SN(X)$ ならば次が成り立つ。

1°) $\mathcal{F}\in N(\Omega)$，$\Omega\equiv\{(z,w)\in D\times G;\ H_D(z,E)+H_G(w,F)<1\}$

2°) Ω は X の正則包である。

<u>定理4.</u> $D_k,E_k\ (k=1,\cdots,m)$ X は定理2のものとする。$\mathcal{F}\in SN(X)$ ならば，次が成り立つ。

1°) $\mathcal{F}\in N(\Omega)$，$\Omega\equiv\{z\in D_1\times\cdots\times D_m;\ h_{D_1}(z_1,E_1)+\cdots+h_{D_m}(z_m,E_m)<1\}$．

2°) Ω は X の正則包である。

<u>定理1～4の証明の概略.</u>

<u>補題1.</u> D を複素空間 $\mathbb{C}^m$ の領域とし，$E\subset D$ を $E\in(L)$ なるコンパクト集合，$\{f_n(z)\}$ を D で正則な関数列で局所一様有界で，E 上で収束するものとする。このとき，$\{f_n\}$ は D で広義一様収束する。

この補題は次の一致の定理を使うことによって、普通のVitaliの定理と同様に示される。

補題2. D, Eは補題1のものとする。$f \in H(D)$のとき、

$$f \equiv 0 \quad (z \in E) \Longrightarrow f \equiv 0 \quad (z \in D).$$

定理1は定理§1で用いられた正則関数の補間多項式近似とベールの定理を使い、補題1の形にもっていき証明される。

補題3. D, E, G, F, X は定理1のものとする。$\mathfrak{F} \in SN(X)$ならば、$\mathfrak{F}$の中の任意の関数列$\{f_n\}$に対して、その部分列$\{g_n\}$で$\{g_n\} \in SUC(X)$なるものが存在する。

この補題は補題1と対角線論法を使うことによって示される。そこで、定理3は補題3と定理1を使うことによって示される。また、定理2、4は数学的帰納法より示される。

文献

[1] M. Hukuhara, L'extensions du theoreme d'Osgood et de Hartogs, Kansu-hoteisiki oyobi Oyo-kaiseki (1930) P. 48.

[2] T. Nishino, Sur une propriété des familles de fonctions analytiques de deux variables complexes, J. Math. Kyoto Univ. 4 (1965) 255-282.

[3] J. Siciak, Separately analytic functions and envelopes of holomorphy of some lower dimensional subsets of $\mathbb{C}^n$. Ann. Pol. Mat. 22 (1969) 145-171.

[4] J. Siciak, *Extremal plurisubharmonic fonctions in $\mathbb{C}^N$*, Ann Pol. Mat. 39, (1981). 175-211.

[5] T. Terada, *Sur une certaine condition sous laquelle une fonction de plusieurs variables complexes est holomorphe.* Publ. of Reser. Inst. for Math. Sci. Vol. 2 (3) (1967) 383-395.

[6] T. Terada, *Analyticités relatives à chaques variable*, J. Math. Kyoto Univ. 12 (2) (1972) 263-296.

[7] K. Nôno, *Normality of Separately Normal Families*, Bull. Fukuoka Univ. of Edu. 31 (3) 13-17 (1981).